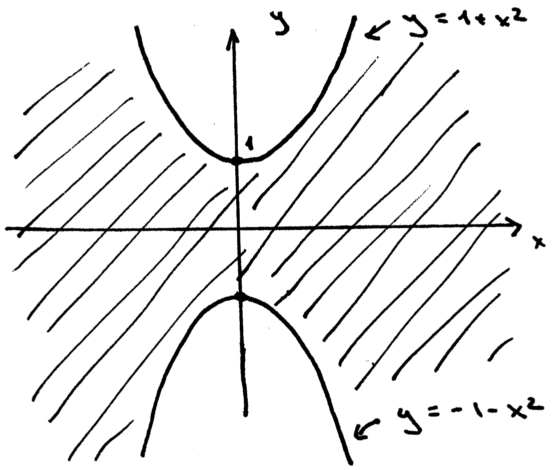
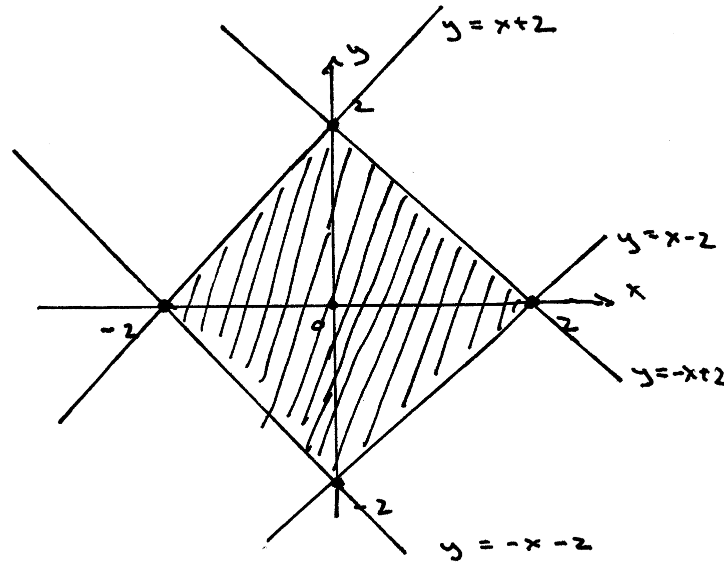
Méthodes mathématiques pour la physique

L2 SM UE403P - examen du 04/05/2010

Exercice 1





domaine D_1:

si $y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1 + x^2$

si $y \leq 0 \Rightarrow -y \leq 1 + x^2$

$\Updownarrow$

$y \geq -1 - x^2$

domaine D_2:

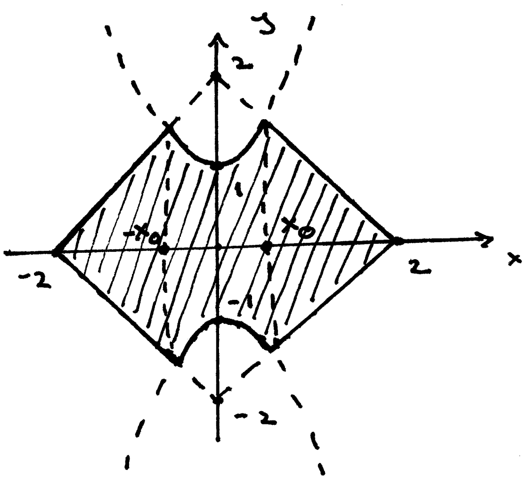
si $x \geq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow y \leq -x + 2$

si $x \leq 0,\ y \geq 0 \Rightarrow y \leq x + 2$

si $x \geq 0,\ y \leq 0 \Rightarrow y \geq x - 2$

si $x \leq 0,\ y \leq 0 \Rightarrow y \geq -x - 2$

L'intesection $D_1 \cap D_2$ est donc de la forme



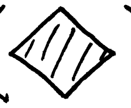
x_0 est déterminé par l'intersection de $y = 1 + x^2$ avec $y = -x + 2 \Rightarrow$

$$1 + x^2 = -x + 2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

On doit prendre "−" car x_0 est positif $\Rightarrow$ $x_0 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

aire() = $\underbrace{\text{aire}(\ \ )}_{= \; 4 \cdot \frac{2 \cdot 2}{2} = 8}$  − 4 · aire()

D'autre part,

aire() $= \displaystyle\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} dx \int_{1+x^2}^{-x+2} dy = \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} dx \ (-x + 2 - 1 - x^2) =$

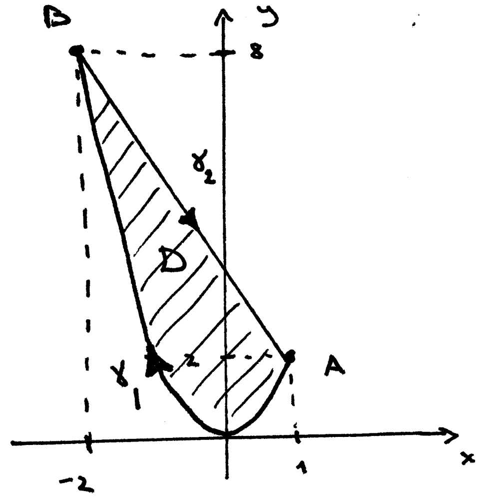
$$= \int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (-x^2 - x + 1)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{(\sqrt{5}-1)^3}{24} - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{8} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} =$$

$$= \frac{5\sqrt{5}-7}{12}$$

et donc l'aire de $D_1 \cap D_2$ est égale à

$$8 - \frac{5\sqrt{5}-7}{3} = \frac{31 - 5\sqrt{5}}{3}.$$

Exercice 2



Méthode 1

Paramétrisation de γ_1 :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 \\ t \in [-2, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = dt \\ dy = 4t\,dt \end{array}$$

$$\int_{\gamma_1} (x+y)\,dx + x^2\,dy =$$

$$= \int_1^{-2} (t + 2t^2)\,dt + t^2 \cdot 4t\,dt = \int_1^{-2} (4t^3 + 2t^2 + t)\,dt =$$

$$= \left(t^4 + \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^{-2} = 16 - \frac{16}{3} + 2 - 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$$

Paramétrisation de γ_2 :

$$\begin{cases} x = x_A t + x_B(1-t) = t - 2(1-t) = 3t - 2 \\ y = y_A t + y_B(1-t) = 2t + 8(1-t) = -6t + 8 \\ t \in [0, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} dx = 3\,dt \\ dy = -6\,dt \end{array}$$

$$\int_{\gamma_2} (x+y)\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 (3t - 2 - 6t + 8)\,3\,dt + (3t-2)^2 \cdot (-6)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (-t+2)\,9\,dt - (9t^2 - 12t + 4) \cdot 6\,dt =$$

$$= \int_0^1 (-54t^2 + 63t - 6)\,dt = \left(-54\frac{t^3}{3} + 63\frac{t^2}{2} - 6t\right)\Big|_0^1 = -18 + \frac{63}{2} - 6 =$$

$$= \frac{15}{2} \Longrightarrow \int_\gamma (x+y)\,dx + x^2\,dy = \frac{21}{2} + \frac{15}{2} = 18$$

Méthode 2 (théorème de Green)

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

le signe "−" apparaît car γ est orienté dans le sens négatif

Dans notre cas, $P(x,y) = x+y$ et $Q(x,y) = x^2$, donc $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x-1$. Alors il nous reste à calculer

$$I = \iint_D (1-2x)\,dx\,dy$$

Pour transformer cette intégrale en une intégrale itérée, on a besoin de l'équation de la droite passant par A et B.

$$y = ax+b$$

$$\left.\begin{array}{ll} A=(1,2) \Rightarrow & a+b=2 \\ B=(-2,8) \Rightarrow & -2a+b=8 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a=-6 \Rightarrow a=-2 \Rightarrow b=4$$

Comme $y=-2x+4$, on obtient

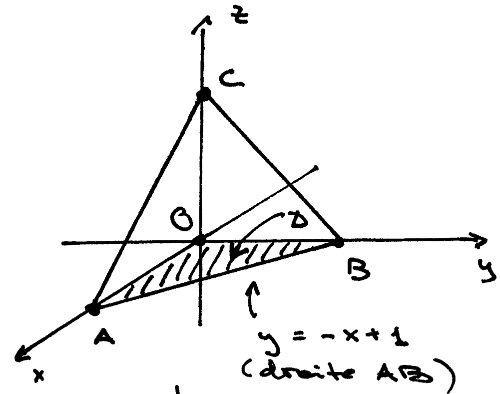
$$I = \int_{-2}^{1} dx \int_{2x^2}^{-2x+4} dy\,(1-2x) = \int_{-2}^{1} dx\,(1-2x)(-2x+4-2x^2)$$

$$= 2\int_{-2}^{1} (2x-1)(x^2+x-2)\,dx = 2\int_{-2}^{1}(2x^3+x^2-5x+2)\,dx =$$

$$= 2\left(2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-2}^{1} = 2\left(\frac{1-16}{2} + \frac{1+8}{3} - 5\frac{1-4}{2} + 2\cdot 3\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{15}{2} + 3 + \frac{15}{2} + 6\right) = 18.$$

Exercice 3



Pour paramétrer la surface du triangle, qui représente une partie du plan passant par A, B, C, on a besoin de l'équation de ce plan.

L'équation d'un plan quelconque: $ax+by+cz+d=0$

$$\left.\begin{array}{ll} A=(1,0,0) \Rightarrow & a+d=0 \\ B=(0,1,0) \Rightarrow & b+d=0 \\ C=(0,0,1) \Rightarrow & c+d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=c=-d \Rightarrow$$ l'équation de notre plan est $x+y+z-1=0$

Une paramétrisation possible:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1-u-v \end{cases} \Rightarrow \vec{r}\,'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}\,'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}\,'_u \wedge \vec{r}\,'_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(u,v) \in D$

Le flux de $\vec{E}$ est alors égal à

$$\Phi = \iint_D \vec{E}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}\,'_u \wedge \vec{r}\,'_v)\, du\, dv =$$

$$= \iint_D \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} du\, dv = \iint_D (yz + xz + xy)\, du\, dv =$$

ici il faut
exprimer x, y, z
en fonction de u, v

$$= \iint_D \left[(1-u-v)(u+v) + uv\right] du\, dv = \iint_D (u+v-u^2-v^2-uv)\, du\, dv$$

$$= \int_0^1 du \int_0^{-u+1} \left[(u-u^2) + (1-u)v - v^2\right] dv =$$

$$= \int_0^1 du \left[(u-u^2)v + (1-u)\frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3}\right]_0^{-u+1} =$$

$$= \int_0^1 du \left[u(1-u)^2 + \frac{(1-u)^3}{2} - \frac{(1-u)^3}{3}\right] = \int_0^1 du \left((u-1+1)(1-u)^2 + \frac{(1-u)^3}{6}\right)$$

$$= \int_0^1 du \left[(u-1)^2 + \frac{5}{6}(u-1)^3\right] = \left[\frac{(u-1)^3}{3} + \frac{5}{6}\,\frac{(u-1)^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$= -\left[-\frac{1}{3} + \frac{5}{24}\right] = \frac{1}{8}.$$

Exercice 4

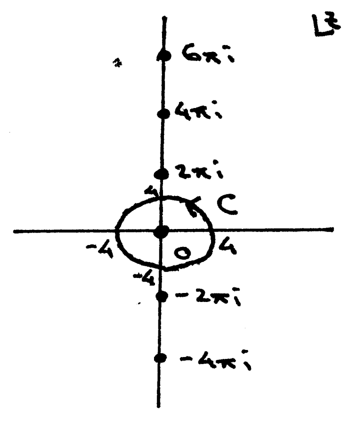


Fig. 1

1). Les pôles de $f(z)$ sont les solutions de l'équation $e^z = 1 \Rightarrow z_k = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$

En développant $e^z - 1$ en série de Taylor au voisinage de z_k, on trouve

$$e^z - 1 = \left[e^z - 1\right]_{z=z_k} + \left[e^z - 1\right]'_{z=z_k}(z - z_k) + \ldots =$$

$$= \underbrace{\left[e^{2\pi i k} - 1\right]}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \underbrace{\left[e^{z}\right]_{z=z_k}}_{\overset{\shortparallel}{1}} (z-2\pi i k) + \sqcup (z-2\pi i k)^2 + \dots$$

Donc tous ces pôles sont simples. Ils sont représentés sur la Fig. 1.

2). Comme $4 < 2\pi$, le seul pôle à l'intérieur de C est $z=0$. Donc, d'après le théorème de résidus,

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{e^z - 1} = 2\pi i$$

3.1). Après le changement de variables $e^{ix} = z$, $dx = \frac{dz}{iz}$, on a

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x + 1}{2\sin x + 4\cos x + 5}\,dx = \oint_{|z|=1 \circlearrowleft} \frac{\frac{z+z^{-1}}{2} + 1}{2\,\frac{z-z^{-1}}{2i} + 4\,\frac{z+z^{-1}}{2} + 5} \cdot \frac{dz}{iz} =$$

$$= \oint_{|z|=1 \circlearrowleft} \frac{z^2 + 2z + 1}{-i(z - z^{-1}) + 2(z + z^{-1}) + 5}\;\frac{dz}{2iz^2} =$$

$$= \oint_{|z|=1 \circlearrowleft} \frac{(z+1)^2}{(2-i)z^2 + 5z + (2+i)}\;\frac{dz}{2iz} = \pi \sum_{\substack{\text{pts sing.}\\ \text{à l'int. de}\\ |z|=1}} \operatorname{res} \frac{(z+1)^2}{z\left[(2-i)z^2 + 5z + (2+i)\right]}$$

Les pôles sont : $z=0$ et les solutions de l'équation

$$(2-i)z^2 + 5z + (2+i) = 0$$

$$\Delta = 25 - 4(2-i)(2+i) = 5$$

$$z_1 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2(2-i)}, \quad z_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2(2-i)}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$|z_1| = \frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} < 1 \qquad |z_2| = \frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} > 1$$

Donc

$$I = \pi \left\{ \operatorname*{res}_{z=0} \frac{(z+1)^2}{z\left[(2-i)z^2 + 5z + (2+i)\right]} + \operatorname*{res}_{z=z_1} \frac{(z+1)^2}{z(2-i)(z-z_1)(z-z_2)} \right\} =$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{2+i} + \frac{(z_1+1)^2}{z_1(2-i)(z_1 - z_2)} \right\} = \pi \left\{ \frac{1}{2+i} + \frac{\left(\frac{-5+\sqrt{5}}{2(2-i)} + 1\right)^2}{\frac{-5+\sqrt{5}}{2(2-i)}\cancel{(2-i)} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2-i}} \right\} =$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{2+i} + \frac{z_1^2 + 2z_1 + 1}{\sqrt{5}\, z_1} \right\} = \pi \left\{ \frac{1}{2+i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(z_1 + \frac{1}{z_1} + 2\right) \right\} =$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{2+i} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[z_1 + \frac{2-i}{2+i} z_2 + 2 \right] \right\} =$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{2+i} + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{-5+\sqrt{5}}{2(2-i)} - \frac{5+\sqrt{5}}{2(2+i)} + 2 \right] \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}} \left[\frac{-5+\sqrt{5}}{2(2-i)} + \frac{\sqrt{5}-5}{2(2+i)} + 2 \right] = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \left[\frac{\sqrt{5}-5}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{2-i} + \frac{1}{2+i} \right)}_{=4/5} + 2 \right] =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{5}} \left[(\sqrt{5} - \cancel{5}) \cdot \frac{2}{5} + \cancel{2} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}\pi .$$

3.2). $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

D'après le théorème de résidus :

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{\text{pts sing.} \\ \text{avec } \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{res} \frac{1}{(z^2+1)^3}$$

Les singularités sont les solutions de $z^2+1=0 \Rightarrow z = \pm i$.
Donc :

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$$

Pour calculer le résidu en $z=i$, il suffit de développer la fonction $f(z) = \frac{1}{(z+i)^3}$ en série de Taylor au voisinage de $z=i$ jusqu'à l'ordre 2 :

$$f(z) = f_{z=i} + f'_{z=i} \cdot (z-i) + f''_{z=i} \frac{(z-i)^2}{2} + \dots$$

On sait que $I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} f''_{z=i} = \pi i \, f''_{z=i}$.
D'autre part :

$$f'(z) = -\frac{3}{(z+i)^4} , \quad f''(z) = \frac{12}{(z+i)^5} \Rightarrow f''_{z=i} = \frac{12}{(2i)^5} = \frac{12}{32 i} = -\frac{3i}{8}$$

Donc, finalement : $I = \pi i \cdot \left(-\frac{3i}{8} \right) = \frac{3\pi}{8}$.

3.3). $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix} dx}{1+x^2} = \Big|$ d'après le lemme de Jordan $\Big|$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \sum_{\substack{\text{pts sing.} \\ \text{avec } \operatorname{Im} z > 0}} \operatorname{res} \frac{e^{iz}}{1+z^2} - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \sum_{\substack{\text{pts sing.} \\ \text{avec } \operatorname{Im} z < 0}} \operatorname{res} \frac{e^{-iz}}{1+z^2}$$

Les points singuliers dans les deux cas sont $z = \pm i$, donc

$$I = \pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)} - \pi i \operatorname*{res}_{z=-i} \frac{e^{-iz}}{(z-i)(z+i)} =$$

$$= \pi i \frac{e^{-1}}{2i} - \pi i \frac{e^{-1}}{-2i} = \frac{\pi}{2e} + \frac{\pi}{2e} = \frac{\pi}{e}.$$